Analysis

# Verkettung von Funktionen

Text Nr. 41090

Stand: 13. Mai 2017

**Friedrich W. Buckel**

Internetbibliothek für Schulmathematik

www.mathe-cd.schule

# Vorwort

Die Nacheinanderausführung zweier Funktionen ist ein sehr wichtiges Instrument der Analysis.
Es ist im Grunde ganz einfach, doch manche benötigen dazu etwas mehr Übung …

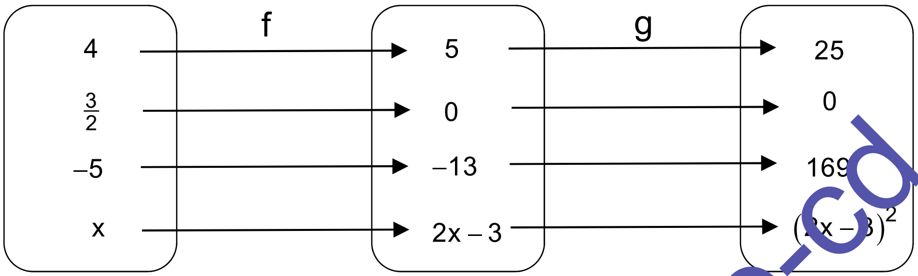
# Inhalt

# 1 Wie verkettet man Funktionen

***Führt man 2 Funktionen nacheinander aus, dann nennt man das Funktionen verketten.***

## Beispiel 1

Gegeben sind die Funktionen f durch $f(x) = 2x - 3$ und g durch $g(x) = x^2$.
Die Aufgabe heißt: *Führe zuerst f aus, und danach g.*




| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Es ist also | $f(4) = 5$ | und | $g(5) = 25$ | also | $h(4) = g(f(4)) = 25$ |
| | $f\left(\frac{3}{2}\right) = 0$ | und | $g(0) = 0$ | also | $h\left(\frac{3}{2}\right) = g\left(f\left(\frac{3}{2}\right)\right) = 0$ |
| | $f(-5) = -13$ | und | $g(-13) = 169$ | also | $h(-5) = g(f(-5)) = 169$ |
| Allgemein gilt: | $f(x) = 2x - 3$ | und | $g(2x-3) = (2x-3)^2$ | also | $h(x) = g(f(x)) = (2x-3)^2$ |

Den Zahlen des Definitionsbereichs von f werden also zuerst „Zwischenwerte" zugeordnet, daraus bildet dann g die Funktionswerte der „verketteten" Funktion.
Die Schreibweise zeigt, dass die Werte f(x) von f in den Term von g eingesetzt werden:

$$x \to f(x) \to g(f(x))$$

Man gibt der verketteten Funktion oft eine neue Bezeichnung, etwa h.
Dann schreibt man das so auf: $h = g \circ f$
Man liest das so: „g nach f"
Die Reihenfolge muss beachtet werden, weil eine Vertauschung meist eine andere Funktion zur Folge hat.
Oft bezeichnet man den Funktionswert f(x) noch mit u, dann sieht diese Verkettung so aus:

$$x \to u = f(x) \to g(u)$$

Es ist wichtig, dass man also der Funktion $h(x) = (2x-3)^2$ ansieht, dass sie als Verkettung zweier Funktionen entstanden ist:
Die „innere Funktion" ist $f(x) = 2x - 3$. Sie wird zuerst ausgeführt. Auf das Ergebnis wird dann die äußere Funktion $g(x) = x^2$ angewandt.

**Aufgabe:** Verkette f und g mit vertauschter Reihenfolge: $k = f \circ g$.
Berechne dazu $k(2)$ und $k(-3)$.

Das Ergebnis steht auf der nächsten Seite.

**Lösung:** g soll also zuerst ausgeführt werden:

$$x \xrightarrow{g} \underbrace{\boxed{x^2}}_{u} \xrightarrow{f} 2u-3 = 2x^2-3$$

Also ist: $k(x) = 2x^2 - 3$

Ausfühlich: $g(2)=4$ und $f(4)=2\cdot\boxed{4}-3=5$, also $k(2)=f(g(2))=2\cdot 4-3=5$

Ausführlich: $g(-3)=9$ und $f(9)=2\cdot\boxed{9}-3=15$, also $k(-3)=f(g(-3))=2\cdot(-3)^2-3=15$

## Beispiel 2

$f(x)=4-x$ und $g(x)=\frac{1}{x}$ sollen auf zwei Arten verkettet werden.

a) $g\circ f:$ Zuerst berechnet man u = f(x) = 4 - x.

Dann wird g angewandt: $y=g(u)=\frac{1}{u}$ also $y=g(f(x))=\frac{1}{4-x}$

Also: $x \xrightarrow{f} \boxed{4-x=u} \xrightarrow{g} g(u)=\frac{1}{u}=\boxed{\frac{1}{4-x}=g(f(x))}$

z. B.: $f(2)=2=u$ und $g(2)=\frac{1}{2}$, also ist $(g\circ f)(2)=\frac{1}{2}$.

Diese verkettete Funktion lautet also: $h(x)=(g\circ f)(x)=\frac{1}{4-x}$

b) $f\circ g:$ Nun kommt zuerst g zum Einsatz: $u=g(x)=\frac{1}{x}$

Dann folgt f: $y=f(u)=4-u$ also $y=f(g(x))=4-\frac{1}{x}$

Also: $x \xrightarrow{g} \boxed{\frac{1}{x}=u} \xrightarrow{f} f(u)=4-u=\boxed{4-\frac{1}{x}=f(g(x))}$

z. B.: $f(2)=\frac{1}{2}=u \Rightarrow g\left(\frac{1}{2}\right)=4-\frac{1}{2}=\frac{7}{2}$, also ist $(f\circ g)(2)=\frac{7}{2}$.

Diese verkettete Funktion lautet also: $k(x)=(f\circ g)(x)=4-\frac{1}{x}$

## Beispiel 3

Verkette $f(x)=\sin x$ mit $g(x)=\frac{1}{2}x$ auf zwei Arten.

a) $g\circ f:$ $x \xrightarrow{f} \boxed{\sin x=u} \xrightarrow{g} g(u)=\frac{1}{2}\cdot u=\boxed{\frac{1}{2}\cdot\sin x=g(f(x))}$

z. B. $f\left(\frac{1}{3}\pi\right)=\sin\left(\frac{1}{3}\pi\right)=\frac{1}{2}\sqrt{3}=u \Rightarrow g\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{3}=\frac{1}{4}\sqrt{3}$

Also ist $(g\circ f)\left(\frac{1}{3}\pi\right)=\frac{1}{4}\sqrt{3}$, allgemein: $h(x)=(g\circ f)(x)=\frac{1}{2}\cdot\sin x$

b) $f\circ g:$ $x \xrightarrow{g} \boxed{\frac{1}{2}\cdot x=u} \xrightarrow{f} f(u)=\sin u=\boxed{\sin\left(\frac{1}{2}x\right)=f(g(x))}$

z. B. $g\left(\frac{1}{3}\pi\right)=\frac{1}{6}\pi=u \Rightarrow f\left(\frac{1}{6}\pi\right)=\sin\left(\frac{1}{6}\pi\right)=\frac{1}{2}$

Also ist $(f\circ g)\left(\frac{1}{3}\pi\right)=\frac{1}{2}$, allgemein: $k(x)=(f\circ g)(x)=\sin\left(\frac{1}{2}x\right)$

**Beispiel 4** Verkette $f(x)=x^2-4$ mit $g(x)=\ln x$

a) $g\circ f$: $\quad x \xrightarrow{f} \boxed{x^2-4=u} \xrightarrow{g} g(u)=\ln u = \boxed{\ln\left(x^2-4\right)=g\left(f(x)\right)}$

z. B. $\quad f(3)=3^2-4=9-4=5=u \quad\Rightarrow\quad g(5)=\ln 5$

Also ist $(g\circ f)(3)=\ln 5$ Allgemein: $(g\circ f)(x)=\ln\left(x^2-4\right)$

b) $f\circ g$: $\quad x \xrightarrow{g} \boxed{\ln x = u} \xrightarrow{f} f(u)=u^2-4=\boxed{(\ln x)^2-4=f\left(g(x)\right)}$

z. B. $\quad g(3)=\ln 3=u \quad\Rightarrow\quad f(\ln 3)=(\ln 3)^2-4$

Also ist $(f\circ g)(3)=(\ln 3)^2-4$. Allgemein: $(f\circ g)(x)=(\ln x)^2-4$

**Beispiel 5** Verkette $f(x)=\frac{1}{x}$ mit $g(x)=\sqrt{x-1}$

a) $g\circ f$: $\quad x \xrightarrow{f} \boxed{\frac{1}{x}=u} \xrightarrow{g} g(u)=\sqrt{u-1}=\sqrt{\frac{1}{x}-1}=\boxed{\sqrt{\frac{1-x}{x}}=g\left(f(x)\right)}$

z. B. : $\quad f(5)=\frac{1}{5}=u \quad\Rightarrow\quad g\left(\frac{1}{5}\right)=\sqrt{\frac{1}{5}-1}\notin \mathbb{R}$ (keine reelle Zahl)

Also existiert $(g\circ f)(5)$ nicht. Allgemein gilt: $(g\circ f)(x)=\sqrt{\frac{1-x}{x}}$

b) $f\circ g$: $\quad x \xrightarrow{g} \boxed{\sqrt{x-1}=u} \xrightarrow{f} f(u)=\frac{1}{u}=\boxed{\frac{1}{\sqrt{x-1}}=f\left(g(x)\right)}$

z. B. : $\quad g(5)=\sqrt{5-1}=2=u \quad\Rightarrow\quad f(2)=\frac{1}{2}$

Also ist $(f\circ g)(5)=\frac{1}{2}$. Allgemein: $(f\circ g)(x)=\frac{1}{\sqrt{x-1}}$

**Beispiel 6** Bestimme $h\circ(g\circ f)$ aus $f(x)=2x^2,\ g(x)=5-x,\ h(x)=\sqrt{x}$

$$x \xrightarrow{f} \underbrace{\boxed{f(x)=2x^2}}_{u} \xrightarrow{g} \underbrace{\boxed{g(u)=5-u=5-2x^2}}_{v} \xrightarrow{h} \boxed{h(v)=\sqrt{5-2x^2}}$$

Ergebnis: $h\left(g(f(x))\right)=\sqrt{5-2x^2}$ oder so: $\left(h\circ(g\circ f)\right)(x)=\sqrt{5-2x^2}$

**Beispiel 7** Bestimme $f\circ(g\circ h)$ aus $f(x)=e^x,\ g(x)=\frac{2}{x},\ h(x)=\sin(x)$

$$x \xrightarrow{h} \underbrace{\boxed{h(x)=\sin x}}_{u} \xrightarrow{g} \underbrace{\boxed{g(u)=\frac{2}{u}=\frac{2}{\sin x}}}_{v} \xrightarrow{f} \boxed{f(v)=e^{\frac{2}{\sin x}}}$$

Ergebnis: $f\left(g(h(x))\right)=e^{\frac{2}{\sin x}}$ oder so: $\left(f\circ(g\circ h)\right)(x)=e^{\frac{2}{\sin x}}$

**Beispiel 8** Bestimme $(f\circ g)\circ f$ und $f\circ(g\circ f)$ aus $f(x)=\frac{4}{x}$ und $g(x)=x+1$

Zuerst: $(f\circ g)(x)=f\left(g(x)\right)=\frac{4}{x+1}$. Dann f in $(f\circ g)$: $\left((f\circ g)\circ f\right)(x)=\frac{4}{\boxed{\frac{4}{x}}+1}=\frac{4x}{4+x}$

Zuerst $(g\circ f)(x)=g\left(f(x)\right)=\frac{4}{x}+1$. Dann $(g\circ f))$ in f: $\left(f\circ(g\circ f)\right)(x)=\frac{4}{\boxed{\frac{4}{x}+1}}=\frac{4x}{4+x}$

(Dabei wurde der Doppelbruch mit x erweitert.)

## Für die Verkettung dreier Funktionen gilt das Assoziativgesetz:

$$f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$$

Beweis: $\left(f \circ (g \circ h)\right)(x) = f \circ \left(g\left(h(x)\right)\right) = f\left(g\left(h(x)\right)\right)$

$\left((f \circ g) \circ h\right)(x) = \left(f\left(g(x)\right) \circ h(x)\right) = f\left(g\left(h(x)\right)\right)$

Beispiel: $f(x) = \sqrt{x}$, $\qquad g(x) = x + 2 \qquad h(x) = \sin(x)$

Zuerst: $(f \circ g)(x) = f\left(g(x)\right) = \sqrt{(x+2)}$

und $(g \circ h)(x) = g\left(h(x)\right) = \sin(x) + 2$

Dann: $\left((f \circ g) \circ h\right)(x) = \sqrt{\boxed{\sin(x)} + 2} = \sqrt{\sin(x) + 2}$

und $\left(f \circ (g \circ h)\right)(x) = \sqrt{\boxed{\sin(x) + 2}} = \sqrt{\sin(x) + 2}$

Hinweis: Das Assoziativgesetz besagt, dass das Ergebnis unabhängig davon ist, wie man die Klammern setzt.

Folgerung: Also darf man ohne Klammern schreiben: $f \circ g \circ h$.
Aus diesem Grunde ist es egal, wie man rechnet: $(f \circ g) \circ h$ oder so: $f \circ (g \circ h)$.

Weitere Folgerung: Das gilt dann auch für die Verkettung von mehr als 3 Funktionen.
Doch das sind nur theoretische Überlegungen. In der Praxis benötigt man kaum mehr als zwei Verkettungen (also 3 Funktionen).

## Aufgabe 1

Bilde für die Funktionen f und g jeweils die Verkettungen

$$h = f(g(x)) = (f \circ g)(x) \quad \text{und} \quad k(x) = g(f(x)) = (g \circ f)(x)$$

a) $f(x) = 2x - 4\ ,\ \ g(x) = 3x - 1$

b) $f(x) = -2x + 2,\ \ g(x) = \frac{1}{2}x + 3$

c) $f(x) = 2^{x+1},\ \ g(x) = 2 - x$

d) $f(x) = 3e^{x},\ \ g(x) = 2 - x^2$

e) $f(x) = \frac{1}{2}x^3,\ \ g(x) = 3x - 4$

f) $f(x) = \frac{2}{x},\ \ g(x) = 1 - x$

g) $f(x) = \sqrt{x},\ \ g(x) = 4 - x$

h) $f(x) = \cos(x),\ \ g(x) = 2x - \frac{1}{4}\pi$

i) $f(x) = \log_2(x),\ \ g(x) = 2^x$

j) $f(x) = \ln(x),\ \ g(x) = \frac{1}{x}$

k) $f(x) = e^{2x},\ \ g(x) = \sqrt{x}$

l) $f(x) = \frac{2}{x},\ \ g(x) = 2e^{-x}$

## Aufgabe 2

Berechne $f \circ f$ und $f \circ \frac{1}{f}$

a) $f(x) = 2x + 1$

b) $f(x) = \frac{2}{x}$

c) $f(x) = \sqrt{x}$

d) $f(x) = (x - 1)^2$

e) $f(x) = x + \frac{1}{x}$

f) $f(x) = 2x^2 + x$

## Aufgabe 3

Berechne $f \circ (g \circ f)$, $(f \circ g) \circ f$, $g \circ (f \circ g)$ und $(g \circ f) \circ g$

a) $f(x) = x^2,\ \ g(x) = 2x + 1$

b) $f(x) = \frac{2}{x},\ \ g(x) = 1 - x$

## Aufgabe 4

Berechne $f \circ (g \circ h)$ und $(f \circ g) \circ h$

a) $f(x) = 4x + 1;\ \ g(x) = 2 - x;\ \ h(x) = 3x - 5$

b) $f(x) = x^3;\ \ g(x) = 2 + x;\ \ h(x) = \frac{1}{2x}$

c) $f(x) = \sqrt{x},\ \ g(x) = x - 1;\ \ h(x) = x^2 + 1$

d) $f(x) = x^2 - 2x;\ \ g(x) = e^x;\ \ h(x) = \sin(x)$

e) $f(x) = \ln(x);\ \ g(x) = \frac{1}{2}x - 1;\ \ h(x) = e^x$

f) $f(x) = \frac{4}{x};\ \ g(x) = \frac{1}{4}x^2;\ \ h(x) = \sqrt{x}$

# 2 Verkettungen identifizieren

## Beispiele

Welche (Teil-)Funktionen $f_1$ und $f_2$ sind in diesen Funktionen verkettet?

a) $f(x)=\left(\frac{1}{2}x-2\right)^3$ b) $f(x)=\frac{4}{x+2}$ c) $f(x)=\sqrt{x-5}$

Im ersten Teil wurden zwei Funktionen f und g vorgegeben und dann verkettet. Das Ergebnis war je nach Reihenfolge der Verkettung eine neue Funktion $g\circ f$ oder $f\circ g$. Jetzt wird das Ergebnis einer Verkettung vorgegeben, und die beiden verketteten Teilfunktionen, die ich jetzt $f_1$ und $f_2$ nenne, sind gesucht. Das Verkettungsergebnis ist als Funktion f vorgegeben, es soll abschließend durch $f_1\circ f_2$ oder $f_2\circ f_1$ dargestellt werden. Wozu man das braucht? Es ist eine Analyse einer komplizierten Funktion und ihre Zerlegung in einfache Teilfunktionen. Das Ergebnis ist übrigens nicht immer eindeutig. Nicht selten gibt es mehrere Wege zur Zielfunktion f.

## Lösung

a) Wenn man mit $f(x)=\left(\frac{1}{2}x-2\right)^3$ einen Funktionswert berechnen soll, dann berechnet man zuerst die Klammer, die 1. Teilfunktion ist also $u=f_1(x)=\frac{1}{2}x-2$.
Dieses Zwischenergebnis wird durch die 2. Teilfunktion weiterverarbeitet: $f_2(u)=u^3$.

Die Verkettung sieht also so aus:

$$x\xrightarrow{f1}\boxed{\tfrac{1}{2}x-2=u}\xrightarrow{f2}f_2(u)=u^3=\left(\tfrac{1}{2}x-2\right)^3$$

Also ist $f=f_2\circ f_1$ mit $f_1(x)=\underbrace{\tfrac{1}{2}x-2}_{u}$ und $f_2(x)=x^3$ oder $f_2(u)=u^3$.´

Man nennt $f_1$ auch die **innere Funktion** und $f_2$ die **äußere Funktion**.
Dies ist im Hinblick auf die Ableitung dieser Funktionen von Bedeutung (Text 41103).

b) Bei $f(x)=\frac{4}{x+2}$ wird zuerst der Nenner berechnet.
Dies leistet die innere Funktion: $u=i(x)=x+2$.
Dann setzt man ihren Funktionswert in die äußere Funktion ein: $a(x)=\frac{4}{u}$.

$$x\xrightarrow{i}\boxed{x+2=u}\xrightarrow{a}f_2(u)=\frac{4}{u}=\frac{4}{x+2}$$

Also ist $f=a\circ i$.

c) Bei $f(x)=\sqrt{x-5}$ wird zuerst $u=i(x)=x-5$ berechnet (innere Funktion),
dann wird die äußere Funktion $a(u)=\sqrt{u}$ angewandt:

$$x\xrightarrow{i}\boxed{x-5=u}\xrightarrow{a}f_2(u)=\sqrt{u}=\sqrt{x-5}$$

Also ist $f=a\circ i$.

## Aufgabe 5

Zerlege folgende verkettete Funktionen in eine innere und eine äußere Funktion.

a) $f(x) = \sin\left(\frac{1}{2}x\right)$

b) $f(x) = e^{\sin(x)}$

c) $f(x) = (2x-4)^5$

d) $f(x) = \dfrac{12}{x^2 - 1}$

e) $f(x) = \dfrac{3}{\log_3(x)}$

f) $f(x) = \sin^2(x) - \sin(x)$

## Aufgabe 6

Zerlege folgende verkettete Funktionen in eine innere, eine mittlere und eine äußere Funktion.

a) $f(x) = \dfrac{3}{\left(x^2-4\right)^2}$

b) $f(x) = 2\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$

c) $f(x) = \frac{1}{2}e^{2x-1}$

d) $f(x) = \ln\left(\dfrac{1}{x+2}\right)$

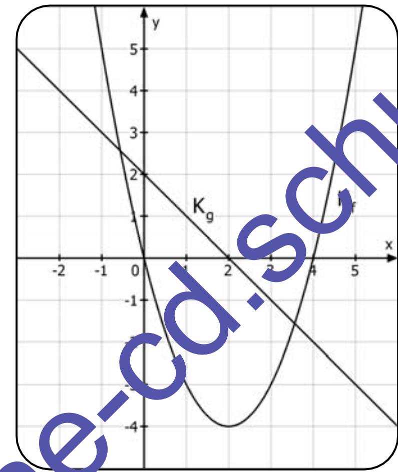
e) $f(x) = \sqrt{x^2+4}$

f) $f(x) = 2^{x+1} + 3$

# 3 Denkaufgaben zu verketteten Funktionen

Aufgaben dieser Art sind beliebt in sogenannten „Pflichtaufgaben ohne Hilfsmitteln“ und zwar nicht nur in Abiturprüfungen.

## Beispiel 1 (Abitur 2014 BW)




Die Abbildung zeigt die Graphen $K_f$ und $K_g$ zweier Funktionen f und g.

a) Bestimme $f(g(3))$.

b) Bestimme einen Wert für x so, dass $f(g(x))=0$ ist.

**Lösung:**

a) Man liest ab: $g(3)=-1$ und $f(-1)=5$

Folglich ist $f(g(3))=f(-1)=5$

b) Bedingung: $f(g(x))=0$.

Substitution: $g(x)=u$ ergibt $f(u)=0$

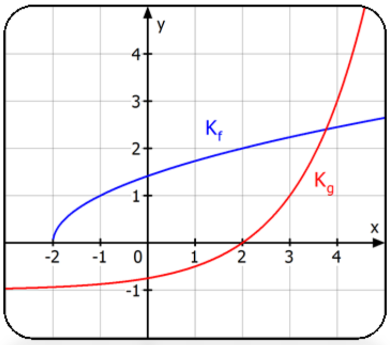
mit den Lösungen $u_1 = 0$ und $u_2 = 4$.

Rücksubstitution: $g(x)=0$ und $g(x)=4$

Die Nullstelle von g ist x = 2, die „Vierstelle“ von g ist x = -2, denn $g(-2)=4$.

Ergebnis: $f(g(2))=f(g(-2))=0$.

## Beispiel 2




Die Abbildung zeigt die Graphen $K_f$ und $K_g$ zweier Funktionen f und g.

a) Bestimme $g(f(2))$, $g(g(4))$,

b) Bestimme einen Wert für x so, dass $g(f(x))=-\frac{1}{2}$ ist.

**Lösung:**

a) Man liest ab: $f(2)=2$ und $g(2)=0$

Folglich ist $g(f(2))=g(2)=0$, $g(g(4))=g(3)=1$

b) Bedingung: $g(f(x))=-\frac{1}{2}$.

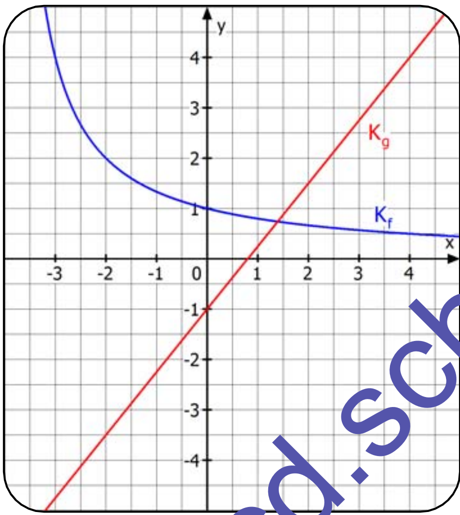
Substitution: $f(x)=u$ ergibt $g(u)=-\frac{1}{2}$

mit der Lösung u = 1.

Rücksubstitution: $f(x)=1$ führt zu x = -1.

Ergebnis: $g(f(-1))=g(1)=-\frac{1}{2}$.

## Beispiel 3




Die Abbildung zeigt die Graphen $K_f$ und $K_g$ zweier Funktionen f und g.

a) Bestimme $g(f(-2))$ und $f(g(4))$ ,

b) Bestimme einen Wert für x so, dass $g(f(x)+1{,}5)=1{,}5$ bzw. $f(g(x))=4$ ist.

**Lösung:**

a) $f(-2)=2$ und $g(2)=1{,}5 \;\Rightarrow\; g(f(2))=1{,}5$

$g(4)=4$ und $f(4)=\frac{1}{2} \;\Rightarrow\; f(g(4))=\frac{1}{2}$

b) $g(f(x)+1{,}5)=1{,}5$

Substitution: $u=f(x)+1{,}5$ ergibt $g(u)=1{,}5$ mit der Lösung $u = 2$.

Also ist $f(x)+1{,}5=2 \;\Leftrightarrow\; f(x)=0{,}5 \;\Rightarrow\; x=4$

$f(g(x))=4$ Substitution: $v=g(x)$ ergibt $f(v)=4 \;\Rightarrow\; v=-3$

Also ist $g(x)=-3 \;\Rightarrow\; x=?$

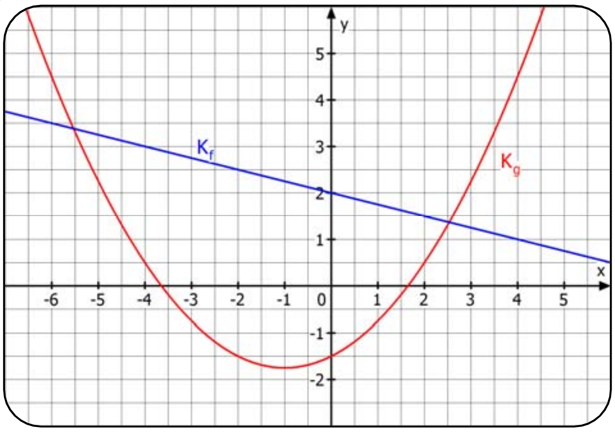
Für den genauen Wert benötigt man die Gleichung von g durch $A(0\,|\,-1)$ und $B(2\,|\,1{,}5)$.

$K_g$ ist eine Gerade mit der Steigung $m=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{2{,}5}{2}=1{,}25=\frac{5}{4}$

Folgerung: $g(x)=\frac{5}{4}x-1$

Bedingung: $g(x)=-3 \;\Leftrightarrow\; \frac{5}{4}x-1=-3 \;\Leftrightarrow\; \frac{5}{4}x=-2 \;\Leftrightarrow\; x=-\frac{8}{5}=-1{,}6$

## Beispiel 4




a) Stelle die Gleichungen der Funktionen f und g auf.

b) Bestimme dann die Funktionen $h(x)=f(g(x))$ und $k(x)=g(f(x))$.

**Lösung:**

a) $K_f$ ist eine Gerade durch $A(0\,|\,2)$ mit der Steigung $m=-\frac{1}{4}$: $y=f(x)=-\frac{1}{4}x+2$

g ist eine nach oben geöffnete Parabel mit dem Scheitel $S\left(-1\,|\,-\frac{7}{4}\right)$: $y+\frac{7}{4}=a\cdot(x+1)^2$.

Die Punktprobe mit $S_y\left(0\,|\,-\frac{3}{2}\right)$ führt zu: $-\frac{3}{2}+\frac{7}{4}=a\cdot(0+1)^2 \;\Leftrightarrow\; \frac{1}{4}=a$

Ergebnis: $y=g(x)=\frac{1}{4}(x+1)^2-\frac{7}{4}$

b) $h(x)=f(g(x))=-\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{4}(x+1)^2-\frac{7}{4}\right)+2=-\frac{1}{16}(x+1)^2+\frac{7}{16}+2=-\frac{1}{16}(x+1)^2+\frac{39}{16}=-\frac{1}{16}\left(x^2+2x-38\right)$

$k(x)=g(f(x))=\frac{1}{4}\left(\left(-\frac{1}{4}x+2\right)+1\right)^2-\frac{7}{4}=\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{4}x+3\right)^2-\frac{7}{4}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{16}x^2-\frac{3}{2}x+9\right)-\frac{7}{4}$

$k(x)=\frac{1}{64}x^2-\frac{3}{8}x+\frac{1}{2}=\frac{1}{64}\left(x^2-24x+32\right)$

# Lösungen Aufgabe 1

## auf CD